

Macaulayova durace perpetuity v době mezi výplatou kupónu

*Bohumil Stádník**

Abstrakt:

V článku se zabýváme odvozením matematické rovnice pro výpočet Macaulayovy durace perpetuitního dluhopisu v období mezi výplatami kupónů, přičemž po této rovnici je poptávka i z finanční praxe a dle našeho zjištění se v rámci běžně dostupné literatury neuvádí. Dostupné zdroje se omezují pouze na rovnici pro výpočet Mac. durace v okamžiku, kdy do výplaty nejbližšího kupónu zbývá přesně jedna celá kupónová perioda. Z odvozené rovnice docházíme k závěru, který je v souladu s finanční intuicí, a to, že velikost Mac. durace perpetuity nezávisí na velikosti kupónu, ale je závislá na vnitřním výnosovém procentu perpetuity a klesá s blížícím se okamžikem výplaty nejbližšího kupónu.

Klíčová slova: Macaulayova durace perpetuity; Cena perpetuity v období mezi výplatou kupónů.

JEL klasifikace: G10, G23.

1 Úvod

Vzhledem k tomu, že se v běžně dostupné literatuře setkáváme pouze s rovnicí pro výpočet Macaulayovy durace (dále v textu jen „Mac. durace“) perpetuitního dluhopisu (dále v textu jen „perpetuita“) v okamžiku, kdy do nejbližší výplaty kupónů zbývá jedna celá kupónová perioda (Fabozzi 1999; Radová et al. 2009; Stádník 2015), v tomto článku si odvodíme vzorec pro častější situaci, tedy pro případ, kdy dochází k nákupu a výpočtu Mac. durace uvnitř kupónové periody.

2 Metodologie

Rovnici pro Mac. duraci je možné odvodit z prvního členu Taylorova polynomu, přizpůsobeného pro účely výpočtu výchylky ceny dluhopisu, a to v závislosti na výchylce změny vnitřního výnosového procenta, podle rovnice (1)

$$\Delta P = P' \Delta i + \frac{1}{2!} P'' (\Delta i)^2 + \frac{1}{3!} P''' (\Delta i)^3 + \dots + R, \quad (1)$$

kde P je obecně cena dluhopisu jako funkce vnitřního výnosového procenta i . U dluhopisů s konečnou dobou do splatnosti je i též nazýváno výnosem do splatnosti. V dluhopisové praxi se tento pojem používá i pro dluhopisy bez

* Bohumil Stádník; Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví, katedra bankovníctví a pojišťovnictví, nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3; <bohumil.stadnik@vse.cz>.

Článek je zpracován jako jeden z výstupů výzkumného projektu Fakulty financí a účetnictví VŠE v Praze, který je realizován v rámci institucionální podpory VŠE IP100040.

splatnosti, ale my se budeme pro zachování logické souladnosti držet pojmu vnitřní výnosové procento. P' , P'' , P''' jsou první, druhá a třetí derivace podle i . Symboly ΔP a Δi označují změnu P a i . Symbol R je zbytek součtu na pravé straně polynomu. Mac. durace je následně vyjádřena z výrazu pro první derivaci P , a to tak, aby vyjadřovala vážený průměr dob do splatnosti jednotlivých finančních toků, kde váhy jsou diskontované finanční toky. Její hodnota též samozřejmě závisí na vnitřním výnosovém procentu. Této definice Mac. durace využijeme i v našem odvození.

Během odvození budeme předpokládat, že frekvence výplaty kupónu je stejná jako frekvence připisování úroků, kterou používáme při diskontování. Tento předpoklad je v souladu s dluhopisovou praxí.

Další možností by též bylo přímo vyjít z prvního členu Taylorova polynomu. V odvození bychom pak museli derivovat P_{perp} v době mezi výplatami kupónů (jedná se o rovnici 4), ale předpokládáme, že výpočetní složitost by ve výsledku nebyla jednodušší.

3 Matematické odvození

Nejprve odvodíme rovnici pro cenu perpetuity – rovnice (2), jestliže dluhopis kupujeme uvnitř kupónové periody a do výplaty nejbližšího kupónu zbývá d dní. Rovnice (2) je výchozí rovnice diskontovaných finančních budoucích toků a jelikož předpokládáme, že finanční toky budou následovat do nekonečna, musíme součet řešit jako limitu.

$$P_{perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{c}{f}}{1 + \frac{d}{d_{year}}i} + \frac{\frac{c}{f}}{\left(1 + \frac{d}{d_{year}}i\right)\left(1 + \frac{i}{f}\right)} + \frac{\frac{c}{f}}{\left(1 + \frac{d}{d_{year}}i\right)\left(1 + \frac{i}{f}\right)^2} + \dots + \frac{\frac{c}{f}}{\left(1 + \frac{d}{d_{year}}i\right)\left(1 + \frac{i}{f}\right)^{n-1}} \right] \quad (2)$$

P_{perp} je cena perpetuity v jednotkách měny, ve které je perpetuita denominována, f je frekvence výplaty kupónu a současně frekvence připisování úroků při diskontování, dle předpokladu v kapitole výše. d je počet dní do výplaty nejbližšího kupónu a d_{year} je počet dní v roce. Parametry d a d_{year} můžeme přizpůsobit požadované „day count convention“.

Aby rovnice vystihovala pořízení perpetuity uvnitř kupónové periody, musí být splněna podmínka, že doba do výplaty nejbližšího kupónu je menší než kupónová perioda, vyjádřeno v letech:

$$\frac{d}{d_{year}} < \frac{1}{f}.$$

Po několika triviálních úpravách výrazu na pravé straně se dopracujeme k rovnici

$$P_{perp} = \frac{\frac{c}{f}}{1 + \frac{d}{d_{year}}i} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{i}{f}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{f}\right)^2} + \dots + \frac{1}{\left(1 + \frac{i}{f}\right)^{n-1}} \right] \quad (3)$$

a následně pak k rovnici

$$P_{perp} = \frac{\frac{c}{f}}{1 + \frac{d}{d_{year}}i} \cdot \frac{1 + \frac{i}{f}}{\frac{i}{f}}. \quad (4)$$

Je vhodné udělat test, jestli vzorec (4) vyhovuje pro situaci, kdy počítáme cenu v okamžiku jedné celé kupónové periody do výplaty nejbližšího kupónu, tedy pro $f = 1$ a $d = d_{year}$.

$$P_{perp} = \frac{\frac{c}{1}}{1 + \frac{1}{1}i} \cdot \frac{1 + \frac{i}{1}}{\frac{i}{1}} = \frac{c}{i} \quad (5)$$

Rovnice (5) není v rozporu s obecně uváděným vzorcem $P_{perp} = \frac{c}{i}$. Kdyby byla v rozporu, rovnice (4) nebude správně.

Pro $f = 2$, kdy používáme půlroční výplatu kupónu a současně půlroční připisování úroků při diskontování, což je například typické pro americké státní dluhopisy, a dluhopis kupujeme půl roku před výplatou nejbližšího kupónu, obdržíme:

$$P_{perp} = \frac{\frac{c}{2}}{1 + \frac{1}{2}i} \cdot \frac{1 + \frac{i}{2}}{\frac{i}{2}} = \frac{c}{i}. \quad (6)$$

Z rovnice (6) je zřejmé, že jestliže je frekvence výplaty kupónů a připisování úroků při diskontování stejná, pak velikost této frekvence nemá vliv na cenu dluhopisu, jestliže ho pořizujeme jednu kupónovou periodu před výplatou nejbližšího kupónu.

Nyní si odvodíme rovnici pro výpočet Mac. durace perpetuity v souladu s výše uvedenou metodologií. Sestavíme tedy rovnici pro vážený průměr dob do výplaty jednotlivých kupónů ode dne, pro který Mac. duraci perpetuity počítáme, přičemž váhy jsou diskontované velikosti kupónů a součet vah je roven ceně perpetuity podle rovnice (4).

$$Dur_{perp} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{d}{d_{year}} \frac{c}{f}}{1 + \frac{d}{d_{year}}i} + \frac{\left(\frac{d}{d_{year}} + \frac{1}{f}\right) \frac{c}{f}}{\left(1 + \frac{d}{d_{year}}i\right)\left(1 + \frac{i}{f}\right)} + \frac{\left(\frac{d}{d_{year}} + \frac{2}{f}\right) \frac{c}{f}}{\left(1 + \frac{d}{d_{year}}i\right)\left(1 + \frac{i}{f}\right)^2} + \dots + \frac{\left(\frac{d}{d_{year}} + \frac{n-1}{f}\right) \frac{c}{f}}{\left(1 + \frac{d}{d_{year}}i\right)\left(1 + \frac{i}{f}\right)^{n-1}} \right]}{\frac{\frac{c}{f}}{1 + \frac{d}{d_{year}}i} \cdot \frac{1 + \frac{i}{f}}{\frac{i}{f}}} \quad (7)$$

V rovnici (7) Dur_{perp} označuje Mac. duraci perpetuity a její hodnota je vyjádřena v letech. Po úpravě:

$$Dur_{perp} = \frac{\frac{\frac{c}{f}}{1+\frac{d}{d_{year}i}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{d_{year}} + \frac{\left(\frac{d}{d_{year}i} + \frac{1}{f}\right)}{\left(1+\frac{i}{f}\right)} + \frac{\left(\frac{d}{d_{year}i} + \frac{2}{f}\right)}{\left(1+\frac{i}{f}\right)^2} + \dots + \frac{\left(\frac{d}{d_{year}i} + \frac{n-1}{f}\right)}{\left(1+\frac{i}{f}\right)^{n-1}} \right]}{\frac{\frac{c}{f}}{1+\frac{d}{d_{year}i}} \cdot \frac{1+\frac{i}{f}}{\frac{i}{f}}}. \quad (8)$$

Výraz v limitě je součet nekonečné aritmeticko-geometrické řady $A_1G_1 + A_2G_2 + \dots + A_kG_k + \dots$, kde $A_1, A_2, \dots$ jsou členy aritmetické posloupnosti s diferencí d a $G_1, G_2, \dots$ jsou členy geometrické posloupnosti s kvocientem q . Vzorček pro k -tý člen aritmeticko-geometrické řady je

$$A_kG_k = [A_1 + (k-1)d]G_1q^{k-1}.$$

Pro $|q| < 1$ řada konverguje, což je i náš případ, jelikož předpokládáme pozitivní úrokovou míru. Hodnota q je tudíž kladná a menší než 1:

$$q = \frac{1}{\left(1+\frac{i}{f}\right)}. \quad (9)$$

Součet takové nekonečné řady je roven (Odvárko 1995; Calda 2013):

$$S = \frac{A_1G_1}{1-q} + \frac{dG_1q}{(1-q)^2}. \quad (10)$$

Dosazením do rovnice (10) dostáváme:

$$Dur_{perp} = \frac{\frac{\frac{c}{f}}{1+\frac{d}{d_{year}i}} \left[\frac{d}{d_{year}} \cdot \frac{1+\frac{i}{f}}{\frac{i}{f}} + \frac{1}{f} \frac{1+\frac{i}{f}}{\left(\frac{i}{f}\right)^2} \right]}{\frac{\frac{c}{f}}{1+\frac{d}{d_{year}i}} \cdot \frac{1+\frac{i}{f}}{\frac{i}{f}}} \quad (11)$$

a následně po úpravách výslednou rovnici:

$$Dur_{perp} = \frac{d}{d_{year}} + \frac{1}{i}. \quad (12)$$

Pro $d = d_{year}$ získáváme rovnici (13), která je v úvodu zmiňovaným a prakticky jediným uváděným vzorcem pro Mac. duraci perpetuity a který platí pouze v okamžiku jedné celé kupónové periody před výplatou nejbližšího kupónu, tedy:

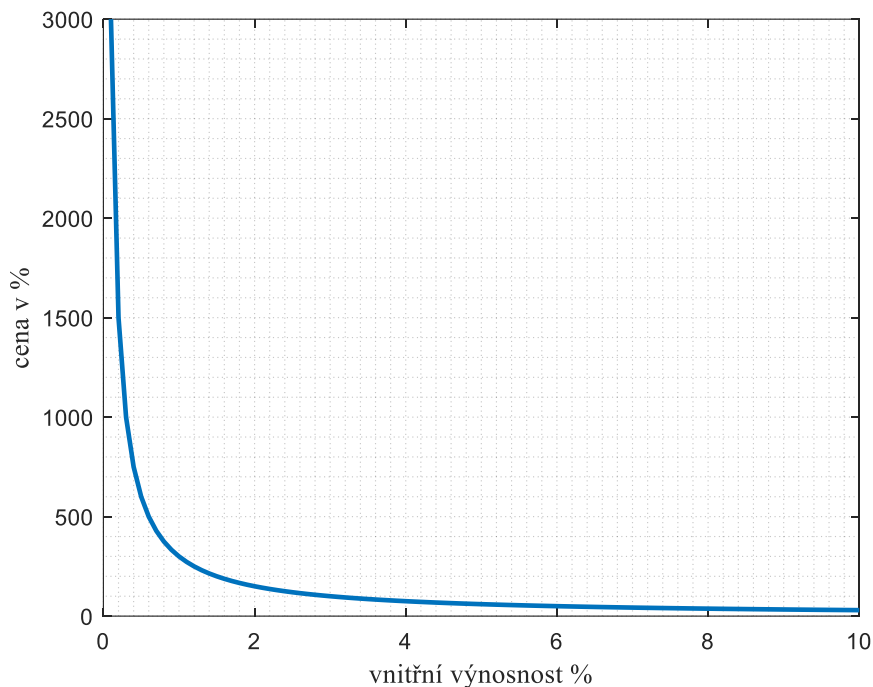
$$Dur_{perp} = 1 + \frac{1}{i}. \quad (13)$$

4 Diskuze nad výsledky

Z obrázku 1 je zřejmé, že citlivost ceny perpetuity na změnu úrokové míry nabývá konečných hodnot, vyjma případu, kdy vnitřní výnosové procento limituje k 0

zprava. Jestliže počítáme Mac. duraci jako střední dobu do splatnosti jednotlivých budoucích finančních toků, mohl by na první pohled být matoucí jejich nekonečný počet, a tudíž i očekávání nekonečně velké střední hodnoty, ale limita v rovnici (7) konverguje, takže i hodnota Mac. durace je konečná.

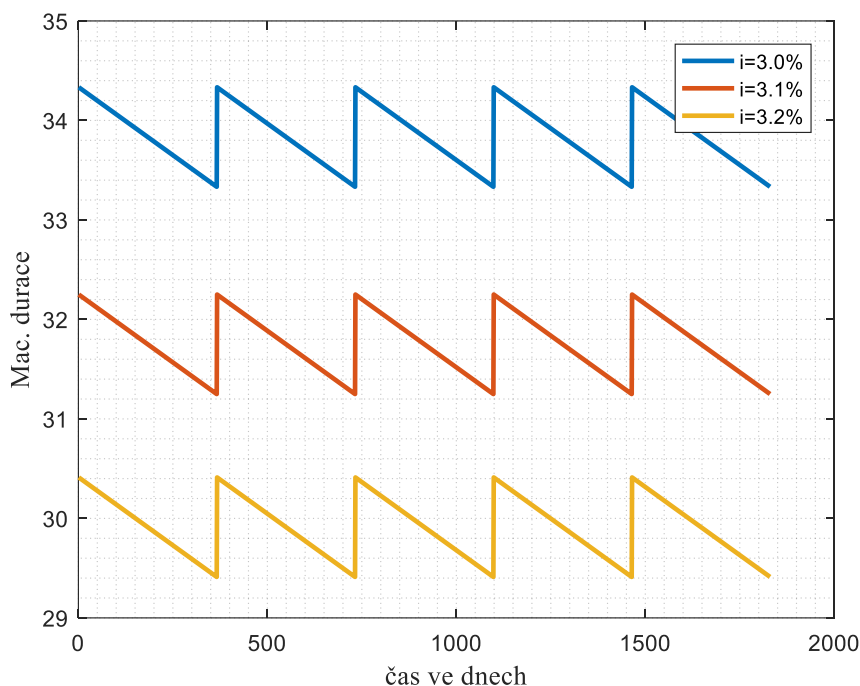
Obr. 1 Cena perpetuity v závislosti na vnitřní výnosnosti



Zdroj: Vlastní zpracování.

Na obr. 2 je průběh ceny perpetuity v čase. Je zřejmé, že její hodnota závisí na velikosti vnitřního výnosového procenta perpetuity a též klesá s blížící se dobou do výplaty nejbližšího kupónu,

Obr. 2 Průběh Mac. durace perpetuity při různém vnitřním výnosovém procentu v čase



Zdroj: Vlastní zpracování.

Intuitivně též cítíme, že v případě perpetuity, velikost Mac. durace nezávisí na velikosti kupónu, oproti typickému dluhopisu s konečnou dobou do splatnosti, jelikož průměrná doba do splatnosti, vážená současnou hodnotou jednotlivých cashflow, je výrazně ovlivněna vzájemnou velikostí kupónů a face value.

5 Závěr

V článku jsme odvodili rovnici pro výpočet hodnoty Mac. durace perpetuity v okamžiku, který se nachází uvnitř kupónové periody, přičemž po této rovnici je poptávka i z finanční praxe.

Hodnota Mac. durace, dle intuitivního finančního pohledu a současně v souladu s odvozenou rovnicí – rovnice (12), nezávisí na velikosti kupónu, ale závisí na počtu dní do výplaty nejbližšího kupónu, přičemž se zmenšujícím se časem do výplaty klesá. Hodnota Mac. durace stoupá s nižší hodnotou úrokové míry, což je též patrné z obrázku 2.

Literatura

CALDA, E., 2013. Součet nekonečné aritmeticko-geometrické řady. *Matematika–fyzika–informatika*. Vol. 22, no. 4, s. 250–252. Dostupné z: <https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/59>.

FABOZZI, F. J., 1999. *Duration, Convexity, and Other Bond Risk Measures*. Hoboken: Wiley.

ODVÁRKO, O., 1995. *Matematika pro gymnázia: Posloupnosti a řady*. Praha: Prometheus.

RADOVÁ, J., J. MÁLEK a P. DVOŘÁK, 2009. *Finanční matematika pro každého*. 7. aktualizované vydání. Praha: Grada.

STÁDNÍK, B., 2015. *Trhy dluhopisů*. Praha: Oeconomica.

The Macaulay duration of a perpetuity bond in the period between coupon payments

Bohumil Stádník

Abstract:

In this paper, we deal with the derivation of the mathematical equation for the Macaulay duration of a perpetuity (hereinafter referred to as "Mac. duration") bond in the period between coupon payments. According to our findings, this equation is not included in the commonly available literature and is limited only to the equation for calculating Mac. duration at the moment when exactly one full coupon period remains before the payment of the nearest coupon. In a mathematical derivation, we come to a conclusion, which is consistent with financial intuition, that the Mac. duration of the perpetuity does not depend on the size of the coupon, but is dependent on the internal rate of return of the perpetuity and decreases as the moment of payment of the nearest coupon approaches.

Keywords: Macaulay duration of perpetuity; The price of perpetuity in the period between coupon payments.

JEL Classification: G10, G23.