

Měření citlivosti ceny dluhopisů[#]

*Jarmila Radová**

Pro analýzu dluhopisů nás kromě základních ukazatelů, k nimž bezesporu patří současná hodnota a výnosnost do doby splatnosti dluhopisu, bude zajímat další faktor, který je důležitý pro každého investora do dluhopisů, neboť ten chce vědět, jaká je citlivost (změna) ceny dluhopisu, pokud se změní úrokové sazby na trzích resp. pokud se posunou současné výnosové křivky. Investoři chtějí především vědět, jak veliké je jejich úrokové riziko a jakým způsobem je ovlivněna hodnota jejich úrokově citlivých investic změnou úrokových měr. Proto se budeme podrobněji zabývat veličinou, která je pro tyto analýzy nezbytná a to durací dluhopisů.

Citlivost ceny dluhopisu

Vyjdeme-li ze vztahu pro výpočet současné hodnoty dluhopisu, resp. vztahu pro výpočet výnosnosti do doby splatnosti dluhopisu,

$$PV = \sum_{j=1}^n \frac{C}{(1+i)^j} + \frac{M}{(1+i)^n}, \quad (1)$$

kde C = roční kupónová platba,
 M = jmenovitá hodnota dluhopisu,
 n = počet let do doby splatnosti,
 PV = současná hodnota dluhopisu,
 i = průměrná roční požadovaná výnosnost.

je možno popsat vliv faktorů působících na změnu ceny dluhopisu v důsledku změny úrokové sazby:

- citlivost ceny je přímo úměrná době splatnosti dluhopisu;
- citlivost ceny dluhopisu je tím větší, čím menší je velikost kupónové sazby, to znamená, že nejcitlivější jsou dluhopisy s nulovým kupónem;
- cena dluhopisu je citlivější na pokles úrokových sazeb než na jejich vzrůst;
- citlivost dlouhodobého dluhopisu na změnu úrokových sazeb je větší než citlivost krátkodobého dluhopisu;
- citlivost ceny je vyšší při nižších tržních úrokových mírách než při vyšších.

Citlivost zde počítáme jako poměr rozdílu cen při dvou různých úrokových sazbách ku původní ceně.

Matematicky můžeme uvedené vazby odvodit následujícím způsobem. Předpokládejme dluhopis s dobou splatnosti n_1 a cenou P_1 při výnosnosti i . Druhý dluhopis má dobu splatnosti

[#] Článek je zpracován jako jeden z výstupů výzkumného projektu *Kreditní riziko a kreditní deriváty* registrovaného u Grantové agentury České republiky pod evidenčním číslem 402/06/0890

^{*} Doc. RNDr. Jarmila Radová, Ph.D. – docentka, vedoucí katedry; Katedra bankovníctví a pojišťovnictví, Fakulta financí a účetnictví, Vysoká škola ekonomická v Praze, nám. W. Churchilla 4, 130 67 Praha 3; <radova@vse.cz>.

$n_2 = n_1 + d$ a má stejnou kupónovou sazbu k a jmenovitou hodnotu M jako první dluhopis. Pro cenu druhého dluhopisu pak platí

$$P_2 = P_1 + \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \frac{C}{(1+i)^j} + \frac{M}{(1+i)^{n_2}} - \frac{M}{(1+i)^{n_1}}, \quad (2)$$

kde C = roční kupónová platba,
 M = jmenovitá hodnota dluhopisu,
 n_1, n_2 = počet let do doby splatnosti prvního resp. druhého dluhopisu,
 P_1, P_2 = současná hodnota prvního resp. druhého dluhopisu,
 i = průměrná roční požadovaná výnosnost.

Úpravou vztahu (2) získáme

$$(P_2 - P_1) \cdot (1+i)^{n_1+d} = \left((1+i)^d - 1 \right) \cdot \left(\frac{C}{i} - M \right), \quad (3)$$

kde d = rozdíl dob do splatnosti obou zkoumaných dluhopisů

Podívejme se na analýzu pravé strany vztahu (3). Výraz v první závorce je vždy kladný pro libovolnou výši výnosnosti i .

Výraz v druhé závorce je pro $\frac{C}{i} > M$, tedy pro $\frac{C}{M} > 100$ kladný, pro ceny dluhopisů proto platí $P_2 > P_1$.

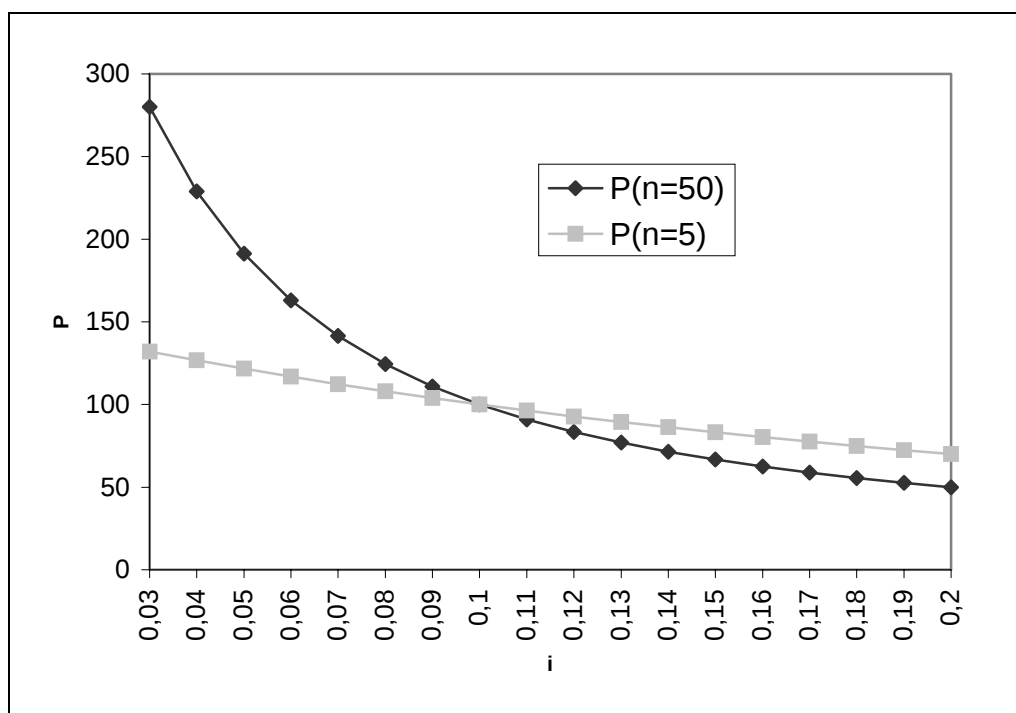
Pro $\frac{C}{M} < 100$ je výraz v druhé závorce na pravé straně vztahu (3) záporný a tedy $P_2 < P_1$.

Z výše uvedené analýzy vyplývá, že s rostoucí dobou do splatnosti se zvyšuje citlivost ceny dluhopisu na úrokové sazbu. Při snížení úrokové sazby se zvýší a naopak. Dochází k rotaci křivky závislosti ceny na úrokové sazbě kolem bodu $i = \frac{C}{M}$. Tento závěr je graficky prezentován na obr. 1.

Analogickými matematickými postupy lze odvodit všechny výše zmíněné vztahy, které se týkají citlivosti ceny dluhopisu na úrokovou sazbu a uvedené faktory.

Díky těmto poznatkům je možno formulovat základní investorské strategie. Jestliže je očekáván pokles úrokových měr (posun výnosové křivky dolů), poroste cena, proto jsou vyhledávány dluhopisy s maximální citlivostí na změnu úrokové míry, tedy dlouhodobé dluhopisy s nízkým kupónem. Jestliže očekáváme růst úrokových měr (posun výnosové křivky nahoru) a tím pokles cen dluhopisů, hledáme dluhopisy minimálně citlivé na změny úrokových měr, tedy krátkodobé dluhopisy s vysokou kupónovou sazbou.

Míra, která popisuje citlivost dluhopisu či spíše jeho ceny na změny úrokových měr, se nazývá *durace*, nebo-li střední doba splatnosti, též střední doba životnosti nebo průměrná doba trvání dluhopisu.

Obr. 1: Citlivost ceny dluhopisu na úrokové sazbě a době splatnosti

Zdroj: vlastní výpočty

Durace jako citlivost ceny dluhopisu

Durace je váženým průměrem dob splatnosti jednotlivých plateb, přičemž vahou každé platby by měla být její „důležitost“, jakou má pro celkovou hodnotu dluhopisu. Přesněji řečeno jde o vážený průměr dob splatnosti jednotlivých finančních toků spojených s dluhopisem, přičemž váhy jsou dány jako poměrný příspěvek jednotlivých diskontovaných finančních toků do celkové ceny dluhopisu.

Váhu každé platby je možno vyjádřit vztahem:

$$w_t = \frac{\frac{C_t}{(1+i)^t}}{P}, \quad (4)$$

kde C_t = pro $t=1,2,\dots,n-1$ kupónová platba a pro $t=n$ kupónová platba včetně jmenovité hodnoty,

w_t = váha t -té platby z dluhopisu pro $t=1,2,\dots,n$

i = výnosnost do doby splatnosti,

P = cena dluhopisu.

Průměrnou váženou dobu splatnosti tedy dostaneme tak, že výše uvedené váhy vynásobíme číslem t , které charakterizuje počet let (obecněji období) do splatnosti každého peněžního toku, který daná váha charakterizuje.

$$D = \sum_{t=1}^n t \cdot w_t, \quad (5)$$

kde D = durace dluhopisu,

Durace je jedním z nejsledovanějších ukazatelů při jakékoli problematice zkoumající dluhopisy, a to hned ze tří důvodů:

- je ukazatelem průměrné splatnosti dluhopisu,
- je jednou z hlavních pomůcek při řízení portfolia dluhopisů,
- je měřítkem citlivosti ceny na změnu úrokové sazby.

Pro matematické odvození durace, musíme vyjít ze známého výrazu pro cenu dluhopisu. Tato veličina se odvozuje jako změna ceny při změně úrokové míry.

Změníme-li úrokovou míru neboli výnosnost i o hodnotu Δi , platí podle Taylorova rozvoje pro funkci $P(i)$

$$P(i + \Delta i) = P(i) + \frac{dP}{di} \cdot \Delta i + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{di^2} \cdot \Delta^2 i + \dots, \quad (6)$$

kde $P(i)$ = cena při úrokové míře (požadované výnosnosti i),

$\frac{dP}{di}$ = derivace ceny podle úrokové sazby,

$\frac{d^2 P}{di^2}$ = druhá derivace ceny podle úrokové sazby,

Δi = změna úrokové sazby.

Vzhledem k tomu, že úrokové sazby jsou vyjádřeny desetinným číslem obvykle výrazně menším než 1, například 0,05, a změna úrokové sazby ještě menším desetinným číslem, můžeme druhou, třetí a další mocniny změny úrokové míry zanedbat. Pro střední dobu splatnosti můžeme tedy z výše uvedeného Taylorova rozvoje odvodit

$$\frac{P(i + \Delta i) - P(i)}{P(i)} = \frac{\Delta P}{P} = \frac{1}{P(i)} \cdot \frac{dP}{di} \cdot \Delta i = -D_{MM} \cdot \Delta i, \quad (7)$$

kde D_{MM} = Modifikovaná Macalayova durace,

Čím je větší durace, tím je větší vliv změny úrokové sazby na cenu dluhopisu.

Ve výrazu pro výpočet durace se objevilo znaménko mínus z toho důvodu, aby durace byla vyjadřována kladným číslem. Ze vztahu vidíme, že durace je bezrozměrná jednotka udávající elasticitu ceny podle změny úrokové míry. Často bývá uváděno, že durace udává průměrnou dobu životnosti v letech. To platí však jen pro dluhopisy s roční výplatou kupónových plateb. Durace obecně udává průměrnou životnost v počtu kupónových období dluhopisu. Následující výrazy pro durace jsou odvozeny zcela obecně pro délku období

rovnou délce kupónového období daného dluhopisu¹. Pokud bychom chtěli vyjádřit durace v letech, musíme výsledek dělit počtem kupónových plateb za rok.

Durace tedy může být použita jako měřítko rizika nebo volatility ceny dluhopisu. Využití této veličiny je však omezeno následujícími předpoklady:

- výnosová křivka je plochá,
- výnosová křivka se posouvá pro všechny doby splatnosti stejně,
- změna úrokových sazeb je malá.

Častěji se používá Macaulayova durace D_M definovaná jako střední doba splatnosti dluhopisu, která vychází ze vztahu

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{1+i}{P(i)} \cdot \frac{dP}{di} \cdot \frac{\Delta i}{1+i} = -D_M \cdot \frac{\Delta i}{1+i} = -(1+i) \cdot D_{MM} \cdot \frac{\Delta i}{1+i}, \quad (8)$$

kde $P(i)$ = cena při úrokové míře (požadované výnosnosti i),

$\frac{dP}{di}$ = derivace ceny podle úrokové sazby,

$D_M, \text{ resp. } D_{MM}$ = Macalayova resp. modifikovaná Macaulayova durace,

Δi = změna úrokové sazby.

Na základě algebraických úprav vztahu pro výpočet současné hodnoty dluhopisu (1)

$$D_M = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{j \cdot C}{(1+i)^j} + \frac{n \cdot M}{(1+i)^n}}{\sum_{j=1}^n \frac{C}{(1+i)^j} + \frac{M}{(1+i)^n}}, \quad (9)$$

kde D_M = střední doba splatnosti – durace – dluhopisu,

C = kuponová platba, kterou můžeme vyjádřit $k \cdot M$,

k = kuponová sazba,

i = výnosnost do doby splatnosti,

příčemž jmenovatel zlomku je cena dluhopisu při úrokové sazbě i .

Podívejme se ještě na analýzu durace z hlediska omezenosti této veličiny v závislosti na době splatnosti, velikosti kupónové i úrokové sazby.

Vztah mezi durací a dobou do splatnosti

Pro dluhopisy s nulovým kupónem je durace vždy rovna době splatnosti, jak vyplývá ze vztahu (9).

Pro dluhopisy s kupónovou platbou je durace vždy menší než doba splatnosti. Je to dáno tím, že investor získává kupónové platby, které může na trhu reinvestovat.

Ve vztahu k době splatnosti lze vyvodit následující závěry:

¹ Pro dluhopisy s půlroční kupónovou platbou se při složeném úročení musí používat půlroční úroková míra p.s. Pro jiné délky období toto platí analogicky.

- durace dluhopisů je menší nebo rovna době splatnosti dluhopisu, přičemž rovnost nastává pouze pro diskontované dluhopisy,
- roste-li doba splatnosti, roste též durace, ale mezní přírůstky průměrné doby příjmů jsou klesající, neboť splátka nominální hodnoty má u dlouhodobějších dluhopisů menší vliv na celkovou současnou hodnotu dluhopisu.

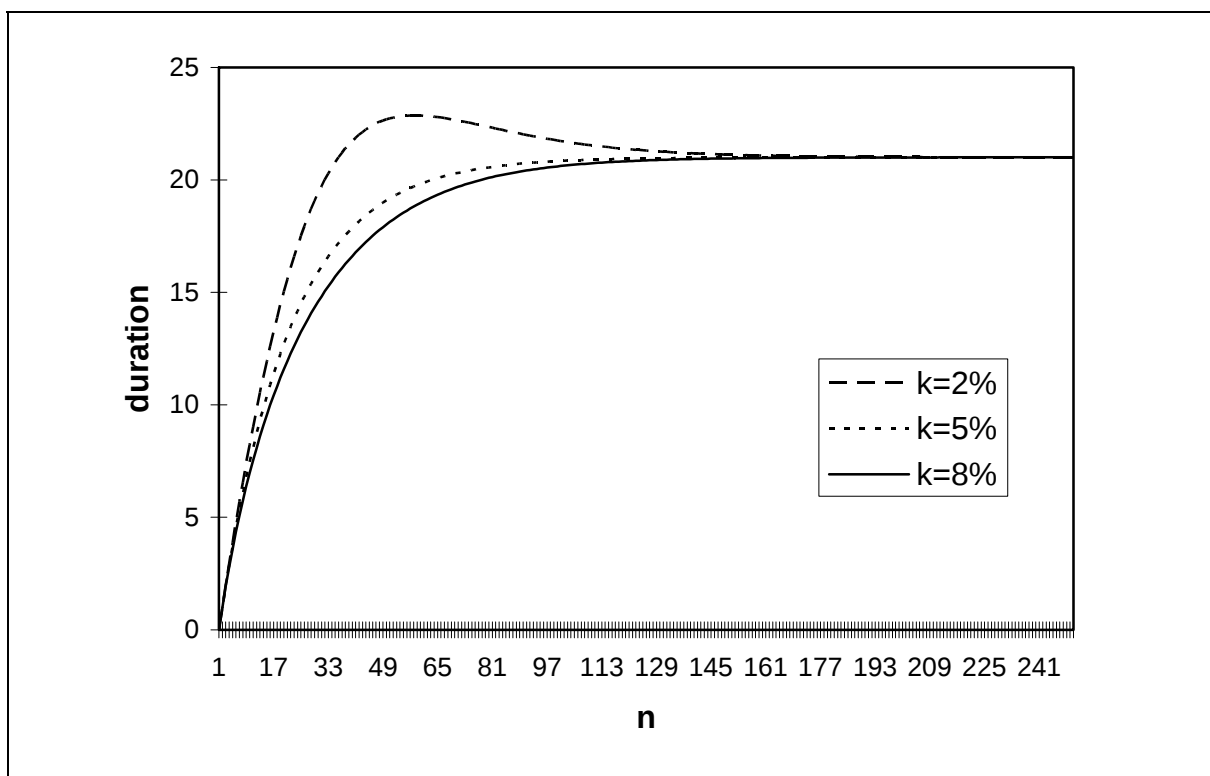
Pro všechny hodnoty sazeb i a k má durace limitu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_M = \frac{i+1}{i} = \frac{1}{i} + 1, \quad (10)$$

kde D_M = durace konzoly – dluhopisu s nekonečnou dobou splatnosti,
 i = výnosnost do doby splatnosti,

Toto má smysl zkoumat zejména pro dluhopisy, které mají hodně dlouhou dobu splatnosti a jsou tedy podobné konzole. Durace konzoly je možno tedy vyjádřit vztahem (10). Platí tedy, že čím je doba splatnosti dluhopisu delší, tím více durace více konverguje k výrazu (10), z něhož je patrné, že se durace s prodlužující se dobou do splatnosti stává nezávislou na kupónové sazbě. Tuto vlastnost ilustruje následující graf, kde $i = 0,05$ a durace konverguje k číslu 21.

Obr. 2: Závislost durace na době do splatnosti dluhopisu



Zdroj: vlastní výpočty

Platí-li $i = k$, cena dluhopisu je rovna jmenovité hodnotě, pak durace nemá maximum stejně jako pro hodnoty $i < k$, tedy pro dluhopisy, jejichž cena je vyšší než jmenovitá hodnota, a je stále rostoucí, ale stále menšími přírůstky. Tyto závěry ilustruje Obr. 2, který je zkonstruován pro úrokovou sazbu $i = 5\%$ a tedy křivky pro kupónovou sazbu $k = 5\%$, resp.

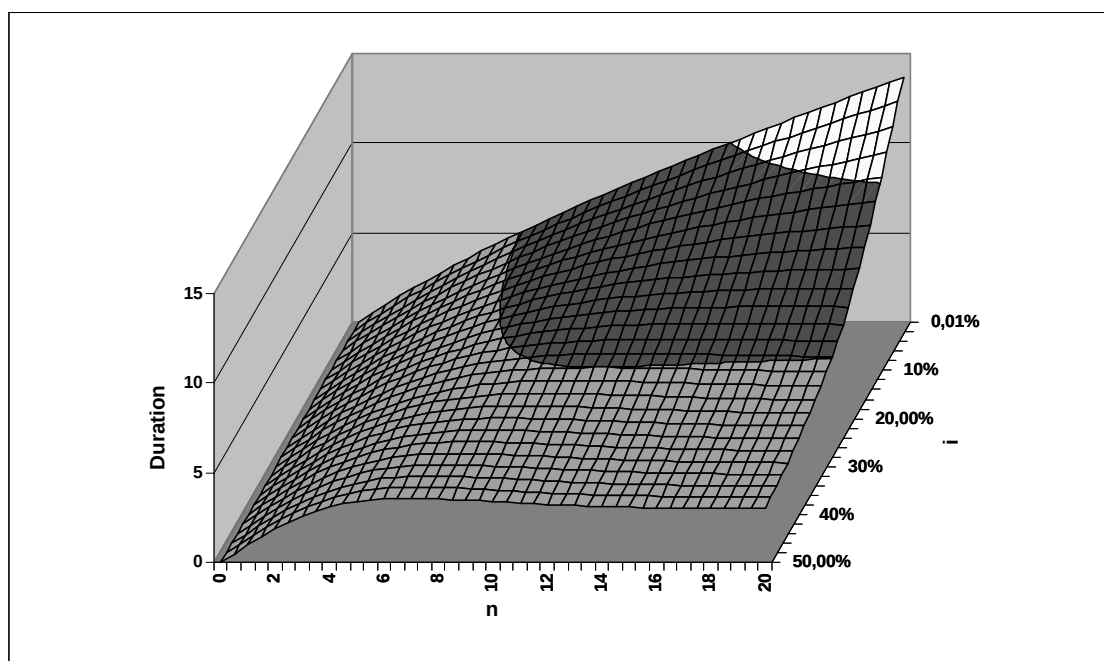
$k = 8 \%$ nemají maximum, jsou stále rostoucí a konvergují k číslu, které udává duraci konzoly, danou vztahem(10).

Pro hodnoty $i > k$, tedy pro dluhopisy, jejichž cena je pod jmenovitou hodnotou, durace nejdříve roste, potom dosáhne vrcholu a poté konverguje opět k číslu, které je dáno výrazem (10). Durace má absolutní maximum. Obr. 2 ilustruje tuto skutečnost křivkou pro $k = 2 \%$. Z právě odvozených vztahů lze vyvodit zajímavý závěr:

- dluhopisy s nízkou kupónovou sazbou a s cenou menší než je jmenovitá hodnota, mohou mít vyšší hodnotu durace než dlouhodobější dluhopisy, jejichž cena je vyšší než jmenovitá hodnota. Vzhledem k tomu, že durace je měřítkem citlivosti ceny na úrokovou sazbu, je za výše uvedených podmínek možné, že krátkodobější dluhopisy budou citlivější na změnu úrokových sazeb než dlouhodobější dluhopisy.

Zkoumání durace pro dlouhý časový horizont má své praktické opodstatnění. Na americkém trhu se běžně vyskytují dluhopisy s dobou splatnosti nad 30 let a dokonce společnost Walt Disney emitovala dluhopis se splatností v roce 2094. I v České republice se uvažuje o emisi státních dluhopisů se splatností 50 let. Poslední, níže uvedený ukazuje závislost durace na dvou proměnných a vidíme, že vzniklá formace je plocha.

Obr. 3: Závislost durace na době do splatnosti a úrokové sazbě



Zdroj: vlastní výpočty

Vztah mezi durací a kupónovou sazbou

Z prezentovaných vztahů vyplývá, že čím vyšší je kupónová sazba, tím nižší je durace dluhopisu.

Z toho vyplývá, že nejvyšší durace při každé době splatnosti bude mít dluhopis s nulovým kupónem. Zerobondy nebo též diskontované dluhopisy jsou tedy citlivější na pohyb úrokových sazeb než dluhopisy kupónové a vykazují větší míru rizika.

Celkově můžeme říci, že vyšší kupónové platby je možno lépe reinvestovat než nižší a tím tedy klesá riziko spojené s dluhopisem.

Vztah mezi durací a počtem kupónových plateb

Ne všechny dluhopisy, jak už jsme uvedli, vyplácejí kupónové platby ročně. Obecně můžeme říci, že čím častější bude výplata kupónových plateb, tím bude durace nižší.

Durace se s rostoucím počtem kupónových snižuje, neboť jednotlivé kupónové platby získá investor dříve a může je využít k dalším investicím. Má totiž možnost pružněji reagovat na vývoj úrokových sazeb.

Pro libovolný počet kupónových plateb m ročně upravíme výrazu (9) a evidentně bude stačit:

- vydělit výši roční kupónové platby číslem m ,
- vydělit roční výnosnost do doby splatnosti číslem m ,
- vynásobit počet let do doby splatnosti číslem m .

Duraci pak dostaneme v m -tinách roku. Na roční bázi převedeme vydělením číslem m .

Vztah mezi durací a výnosností do doby splatnosti

Veličina durace je ovlivňována výší úrokové míry. Čím je úroková míra vyšší, tím více klesají současné hodnoty budoucích kupónových plateb s tím, že ty nejvzdálenější vykazují největší relativní pokles. To ovlivňuje čitatele vzorce pro durace a tedy můžeme říci, že čím vyšší je úroková míra (výnosnost), tím nižší je durace.

Tento závěr již ilustroval Obr. 1., z něhož vyplývá, že

- s rostoucí dobou do splatnosti je pokles durace při růstu úrokových sazeb strmější,
- při vysokých úrokových sazbách může durace krátkodobého dluhopisu být vyšší než durace dlouhodobého dluhopisu.

Korunová durace

Dalším nástrojem odvozeným od durace je tzv. korunová durace.² Je definována vztahem:

$$D_{KOR} = D_{MM} \cdot P(i) = D_m \cdot \frac{P(i)}{(1+i)}, \quad (11)$$

kde D_{MM} = Macaulayova durace modifikovaná,
 D_{KOR} = korunová durace,
 D_M = Macaulayova durace,
 i = výnosnost do doby splatnosti,
 $P(i)$ = cena dluhopisu,

² Zpravidla se používá pojem dolarová durace, ale pro dluhopisy emitované v českých korunách ji můžeme nazývat korunová durace.

D_{KOR} přímo udává změnu ceny dluhopisu a to v Kč. Vzhledem k tomu, že se na trhu udává cena procentem jmenovité hodnoty, pak korunová durace udává změnu této ceny.

Efektivní modifikovaná durace

Poslední formou durace, na kterou zde upozorníme, je tzv. efektivní modifikovaná durace D_{ME} , což je durace zjištěná přímo z reálných dat. Někdy se setkáváme s pojmem empirická durace. Často je třeba znát citlivost ceny dluhopisu na změnu výnosové křivky.

Podobně jako modifikovanou Macaulayovu durace můžeme efektivní durace vyjádřit vztahem (7)

$$D_{ME} = -\frac{dP}{di} \cdot \frac{1}{P},$$

$$\text{kde } \frac{dP}{di} = \lim_{\Delta i \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta i}.$$

Efektivní duraci můžeme vypočítat jako procentuelní změnu ceny při velmi malé změně spotové výnosové křivky. Označme si $i(n) = i_1, i_2, \dots, i_n$ spotové sazby pro jednotlivá období do doby splatnosti n . Malá změna spotových sazeb znamená, že se všechny sazby posunou o Δi . Tedy $i_1(n) = i(n) + \Delta i$.

Cena dluhopisu při výnosové křivce $i(n)$ je P a při výnosové křivce $i_1(n)$ je P_1 . Rozdíl mezi novou a původní cenou označme $\Delta P = P_1 - P$.

Efektivní durace budeme tedy počítat v situaci, kdy se výnosová křivka posunula o Δi a cena dluhopisu se změnila o ΔP .

Pak efektivní durace je dána vztahem:

$$D_{ME} = -\frac{\% \Delta P}{\Delta i} = -\frac{\Delta P}{P} \cdot \frac{1}{\Delta i}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{kde } D_{ME} &= \text{efektivní durace,} \\ \Delta i &= \text{změna úrokové sazby,} \\ \Delta P &= \text{Macaulayova durace,} \end{aligned}$$

Efektivní modifikovaná durace je skutečná míra citlivosti ceny při daných podmínkách na trhu. Tato veličina má jistou specialitu, neboť se zde můžeme setkat s různými nestandardními hodnotami, které se jinak při analýze pomocí durace nevyskytují. Způsobuje to pohyb cen na reálných trzích, který se nemusí řídit jen a pouze pohybem úrokových měr. Vypočítaná efektivní durace může být například větší než doba do splatnosti dluhopisu (při velké změně ceny a malém posunu úrokové míry), či dokonce záporná (například pokud cena nepatrně vzroste a úroková míra také vzroste). Efektivní durace se pokusili někteří ekonomové dokonce spočítat i u akcií.³

³ Ekonomové Reilly a Sidha se pokusili spočítat a odhadnout durace akcií. Odhadují, že se většinou nachází v rozmezí od 10-ti do 20-ti let. Efektivní durace se pokusil vypočítat také Leibowitz u akcií obsažených v S&P 500 a odhaduje, že se nachází mezi 0 až 7 lety. Podle Reilly – Brown (2004, s. 580).

Další možnosti analýzy pomocí durace

Ačkoli se v práci zaměřujeme na fixně úročené dluhopisy, naznačíme stručně, jak je možné veličinu durace využít i pro jiné typy dluhopisů. Tato problematika je velmi rozsáhlá a vede i ke kombinacím dluhopisů s některými typy finančních derivátů.

Durace vypověditelných dluhopisů

Vypověditelný dluhopis je emitován s tím, že jej emitent může na základě svého rozhodnutí splatit i ve zkrácené lhůtě před dobou splatnosti. Většinou mají tyto dluhopisy garantovanou dobu, před kterou nemohou být vypovězeny.

Pro stanovení ceny (současné hodnoty) takového dluhopisu, musíme vzít v úvahu jak normální předpokládanou splatnost, tak splatnost zkrácenou.

Právo vypovědět dluhopis je výhodou pro emitenta, protože mu zajišťuje možnost snížení budoucích nákladů. Emitent proto vyplácí investorovi prémii ve formě zvýšené jmenovité hodnoty.

Pro investora je nákup takového dluhopisu naopak nevýhodou, protože může dojít k poklesu výnosu za dobu držby v případě, že cenný papír bude skutečně předčasně splacen.

Emitent umoří dluhopis tehdy, jestliže úroková sazba poklesne natolik, že úspory z emise nového cenného papíru při této nižší úrokové sazbě převýší vyplácenou premii.

Výrazy pro výpočet durace, které jsme odvodili v předcházejících odstavcích, se týkají standardních dluhopisů s fixní kupónovou sazbou. Můžeme však zkoumat též durace vypověditelných dluhopisů. V tom případě je úloha vypočítat durace složitější, i když jsou používány dříve odvozené postupy. Problém spočívá v tom, že doba splatnosti se neustále řídí aktuální cenou a výnosností do doby splatnosti. Vycházíme z toho, že vypověditelný dluhopis je v zásadě portfolio složené z dlouhé pozice nevypověditelného dluhopisu a z krátké pozice kupní (call) opce. Tomu odpovídá cenová rovnice

$$\text{Cena vypověditelného dluhopisu} = \text{Cena nevypověditelného dluhopisu} - \text{cena kupní opce}$$

Při klesajících úrokových sazbách bude vzrůstat cena dluhopisu, nicméně vzrůst ceny vypověditelného dluhopisu bude omezen vzrůstem ceny opce. Pravděpodobnost brzkého využití opce se bude zvyšovat a cena vypověditelného dluhopisu se proto bude blížit ceně krátkodobého dluhopisu s dobou splatností zhruba odpovídající době využití opce.

Při vzrůstajících úrokových sazbách bude klesat cena primárního dluhopisu i cena opce. Pravděpodobnost využití opce bude klesat a cena volatelného dluhopisu se proto bude blížit ceně primárního dluhopisu.

Připomeňme ještě, že při vzrůstajících úrokových sazbách cena krátkodobého dluhopisu klesá pod cenu dlouhodobého dluhopisu a při klesajících sazbách vzrůstá cena dlouhodobého nad cenu krátkodobého.

Pro durace vypověditelného dluhopisu můžeme zformulovat podobnou rovnici jako pro jeho cenu:

Durace vypověditelného dluhopisu = Durace nevypověditelného dluhopisu – durace kupní opce (Fabozzi, 1998, s. 109).

Jednoznačně lze říci, že možnost předčasného splacení dluhopisu durace, neboli průměrnou dobu do splatnosti, snižuje, poněvadž splátku jmenovité hodnoty dluhopisu můžeme pouze uspišit a v případě, že se předčasné splacení nerealizuje, ji stejně získáme v době splatnosti.

Durace dluhopisů s pohyblivou kupónovou sazbou

Investoři do těchto typů cenných papírů dostávají vyplacenou kupónovou platbu, jejíž výše je vázána na vývoj některé referenční úrokové sazby. To velmi ztěžuje výpočet, neboť neznáme přesné hodnoty peněžních toků spojených s dluhopisem v budoucnu. Majitelé dluhopisů s pohyblivou kupónovou sazbou (FRN) obvykle získávají kupónové platby dvakrát ročně. V den výplaty kupónové platby dochází rovněž k nastavení nové kupónové sazby na základě vývoje veličiny, na níž je kupónová sazba vázána (Grobels, 1987). Můžeme tedy říci, že se její velikost odvíjí od tržní úrokové sazby. Zároveň v tento den má další kupónová platba splatnost ve výši počtu dní d , které zbývají do jejího splacení. Současnou hodnotu budoucích kupónových plateb získáme diskontováním pomocí úrokové míry rovné míře, podle které se počítá nejbližší kupónová platba. Dojde-li poté ke zvýšení úrokové míry, hodnota budoucí kupónové platby a jmenovitá hodnota jsou na její výši nezávislé. Znamená to, že durace FRN bude stejná jako durace dluhopisu, který vyplácí kupónovou platbu a jmenovitou hodnotu za d dní, tedy bude rovna $d/360$.

Komplikace nastává v případě, že kupónová sazba je vázána nejen na referenční úrokovou sazbu, ale též na prémii za riziko, která je investorům placena z dluhopisů, které nejsou bezrizikové. Tato premie nebývá konstantní v čase, ale mění se změnami úrokových sazeb. Roste-li spread (rozpětí) této rizikové premie, prodlužuje se durace FRN (Solnik, 1988) a naopak. Pak tedy nelze durace FRN aproximovat dobou do následující kupónové platby. Míra, kterou použijeme pro diskontování následujících plateb je rovna

$$r^* = r + \beta, \quad (13)$$

kde r = referenční úroková sazba (bezriziková),
 β = riziková premie.

Empiricky je prokázáno, že současná hodnota je citlivější na změny rizikového spreadu než na změny variabilní úrokové míry.

Citlivost ceny FRN lze vyjádřit pomocí Macaulayovy durace a durace rizikového spreadu. Platí:

$$\frac{\Delta P}{P} = -D_M \cdot \Delta r - D_\beta \cdot \Delta \beta, \quad (14)$$

kde D_M = Macaulayova duration,
 Δr = změna referenční úrokové sazby,
 ΔP = změna ceny,
 D_β = durace rizikového spreadu,
 $\Delta \beta$ = změna rizikové premie,

Durace rizikového spreadu je definována jako durace pevně úročeného dluhopisu založeného na referenční úrokové sazbě a úrokového spreadu, který je splatný v době splatnosti FRN.

Durace druhé generace

Jak jsme již dříve uvedli, je výraz pro výpočet durace (7) odvozen za jistých omezujících předpokladů, k nimž patří předpoklad ploché výnosové křivky a její stejné pohyby pro všechny doby do splatnosti. Výhoda tohoto postupu spočívá v relativní snadnosti a jednoduchosti výpočtu. Nevýhoda je dána tím, že uvedené předpoklady nebývají vždy splněny, a proto vypočtené výsledky nemusí být zcela přesné.

- Předpokládejme nyní, že výnosová křivka není plochá.

Pro výpočet současné hodnoty dluhopisu a zároveň pro výpočet durace nebudeme tedy používat konstatní požadovanou výnosnost, ale budeme uvažovat spotové úrokové míry pro různé doby splatnosti, kterými budeme diskontovat budoucí platby spojené s dluhopisem.

Durace, pak dostaneme ve tvaru

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{j \cdot C}{(1+i_j)^j} + \frac{n \cdot M}{(1+i_n)^n}}{\sum_{j=1}^n \frac{C}{(1+i_j)^j} + \frac{M}{(1+i_n)^n}}, \quad (15)$$

- kde D_M = střední doba splatnosti – durace – dluhopisu,
 C = kuponová platba, kterou můžeme vyjádřit $k \cdot M$,
 i_j = spotové úrokové míry pro různé doby splatnosti,

Tento výraz je někdy nazýván jako Fisher-Weilova durace (Fische – Weil, 1971). Z tohoto výrazu je zřejmé, že při rostoucí výnosové křivce je Fisher-Weilova durace větší než Macaulayova, protože současná hodnota vzdálenějších kupónových plateb má ve Fisher-Weilově durace nižší váhu.

Další přístup k definici durace je založen na výpočtu pomocí budoucích jednoletých úrokových měr (forwardových měr), kterými se diskontují budoucí peněžní toky spojené s dluhopisem (Bierwag – Kaufman, 1988). Durace pak vypočítáme dle vztahu:

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{j \cdot C}{\prod_{k=1}^j (1+f_{1k-1})^k} + \frac{n \cdot M}{\prod_{k=1}^n (1+f_{1k-1})^k}}{\sum_{j=1}^n \frac{C}{\prod_{k=1}^j (1+f_{1k-1})^k} + \frac{M}{\prod_{k=1}^n (1+f_{1k-1})^k}}, \quad (15)$$

- kde D = střední doba splatnosti – durace – dluhopisu,
 C = kuponová platba, kterou můžeme vyjádřit $k \cdot M$,
 f_{1k-1} = forwardové jednoleté úrokové míry pro různé doby splatnosti,

Oba uvedené výrazy pro *durace* se někdy nazývají *durace druhé generace*. V závislosti na sklonech výnosových křivek se dají očekávat odlišné výsledky, jak už jsme uvedli výše. Při rostoucích výnosových křivkách bude *durace druhé generace* vyšší než Macaulayova a naopak. Při horizontálních výnosových křivkách jsou přirozeně výsledky naprosto stejné, jako při použití výnosnosti do doby splatnosti. Výhodou klasické *durace* je jednoduchost výpočtu výnosnosti do doby splatnosti proti složitému odhadování možných forwardových měr.

- Předpokládejme nyní nerovnoběžné posuny výnosové křivky.

Na základě zkoumání výnosových křivek je známo, že se mění nejen jejich úroveň, ale též sklon. Mění-li se časová struktura úrokových sazeb nerovnoběžným způsobem, bude současná hodnota dluhopisu i *durace* jiná než při rovnoběžném posunu.

Pokud při rostoucí výnosové křivce vzrostou dlouhodobé úrokové sazby více než krátkodobé, bude v takovém případě *durace* nižší, než by byla při rovnoběžném posunu výnosové křivky, a to i v případě, že by byl růst výnosnosti do doby splatnosti stejný jak při rovnoběžném tak při nerovnoběžném posunu výnosové křivky. Toto můžeme vysvětlit tím, že vzdálenější platby související s dluhopisem budou mít menší váhu při výpočtu současné hodnoty dluhopisu, než by měly v případě rovnoběžného posunu (růstu) výnosové křivky. Lze tedy říci, že strmější tvar výnosové křivky povede k většímu poklesu *durace* i současné hodnoty dluhopisu než rovnoběžný posun výnosové křivky. A naopak, narovnění výnosové křivky povede k menšímu poklesu *durace* a současné hodnoty dluhopisu než při rovnoběžném poklesu výnosové křivky.

Imunizace a headging

Durace i v té jednodušší formě měří citlivost ceny dluhopisu na změnu úrokových sazeb. Můžeme ji tedy použít pro měření rizika změny úrokových sazeb. Budeme-li uvažovat portfolio dluhopisů je možno *durace* použít pro:

- headging, kdy *durace* portfolio je rovna nule,
- imunizaci, kdy *durace* portfolio je rovna investičnímu horizontu.

Headging tedy znamená, že se snažíme vyrušit změny cen dluhopisů obsažených v portofoliu. Protože známe hodnoty *durace* jednotlivých dluhopisů obsažených v portofoliu, jsme schopni nastavit *durace* celého portfolio na nulu. Protože však ceny většiny dluhopisů (cenných papírů) na finančních trzích jsou pozitivně korelovány, používají se k headgingu spíše finanční deriváty.

Ukažme si princip pro vzájemné hedgování pozic dvou dluhopisů. Díky korunové *durace* víme, o kolik se přibližně změní cena jednoho dluhopisu při očekávaném posunu jeho výnosnosti do doby splatnosti. Podle změny ceny nakoupíme či prodáme druhý dluhopis tak, aby se vzájemné změny cen určené pomocí D_{KOR} negovaly. Vše samozřejmě silně závisí na předpokladech o budoucích posunech výnosových měr jednotlivých dluhopisů.

Při imunizaci chceme docílit určitého výnosu na danou dobu, která je rovna investičnímu horizontu. Výnos v případě imunizace není ovlivněn pohyby úrokových měr. Jelikož však existuje nelineární vztah mezi *durací* a postupně se zkracující dobou do splatnosti, je třeba stále portfolio představovat tak, aby byl dodržen původní časový horizont, po který má být portfolio imunizováno. Doba do splatnosti však není jediným faktorem, který ovlivňuje *duraci*. Víme, že klesající úrokové sazby zvyšují *duraci* a k tomu se musí při imunizaci

portfolia též přihlížet. Je třeba změnit složení portfolia ve prospěch krátkodobějších dluhopisů.

Závěr

Kromě měření citlivosti cen dluhopisů na změny úrokových sazeb se durace využívá při řízení portfolií dluhopisů. Teoreticky je možné imunizovat portfolio vůči změnám úrokových sazeb tím, že střední doba splatnosti portfolia bude rovna požadované době držby. Účelem takového přístupu je snaha investora o dosažení požadované výnosnosti bez ohledu na to, zda úrokové sazby rostou či klesají.

Durace je pro investora užitečným nástrojem ke stanovení cenové citlivosti dluhopisu, tj. k určení závislosti ceny na kupónové sazbě, době splatnosti a úrokové sazbě. Investoři mohou porovnat pohyb cen různých dluhopisů způsobených změnou úrokové sazby jednoduše porovnáním jejich durace. Durace, jak již bylo výše uvedeno, slouží k rychlému stanovení nové ceny způsobené změnou úrokové sazby. I když tato cena není zcela přesná, neboť jsme zanedbali druhou a další derivace ceny podle úrokové sazby, vzhledem k malým změnám úrokové sazby většinou postačuje.

Literatura

- [1] Bierwag, G. O. – Kaufman, G. G. (1998): *Duration Models*, Journal of Portfolio Management, 1988, roč. 15, č. 1, s. 15-54.
- [2] Fabozzi, F. J. – Fabozzi, T. D. (1998): *The Handbook of Fixed Income Securities*, Homewood, Irwin, 1998.
- [3] Fischer, L. – Weil, R. A. (1971): *Coping with the Risk of Interest-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naive and Optimal Strategy*. Journal of Business, 1971, roč. 44, č. 4, s. 408-431.
- [4] Grobel R. A. (2003): *Understanding the Duration of FRN*. New York, Salomon Brother, 2003.
- [5] Reilly, F. K. – Brown, K. C. (2004): *Investment Analysis and Portfolio Management*. Forth Worth, The Dryden Press, 2004.
- [6] Solnik B. (1996): *International Investments*. Reading, Addison-Wesley, 1996

Měření citlivosti ceny dluhopisů

Jarmila Radová

ABSTRAKT

V příspěvku jsou analyzovány různé typy durace, což je míra reakce ceny dluhopisu na změnu úrokových sazeb, přičemž se zkoumají jednotlivé faktory, které ovlivní její výši a tím i změnu ceny v důsledku změny úrokové sazby. Jsou diskutovány různé přístupy k výpočtu durace a ukázán její význam pro řízení portfolia dluhopisů.

Klíčová slova: Durace; Výnosnost do doby splatnosti; Imunizace.

Measuring of bond price sensitivity

ABSTRACT

In this article is analyzed duration as a measure of interest risk of bonds. We study significant factors which influence on highness of duration and also price change of bonds. We discuss different ways to calculate duration and also we try to show its importance to management of bonds portfolio.

Key words: Duration; Yield to maturity; Immunization.

JEL classification: G12, G24.